§ Дифференциалдық теңдеулердің жалпылама шешімнің кіргізудің екі тәсілі

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге қойылған есептің бастапқы мәні, шекаралық мәні және теңдеудің оң жағы керекті туындыларымен үзіліссіз болса, онда біз теңдеудің туындысының ретіне сәйкес үзіліссіз (туындысымен қоса үзіліссіз) шешім табамыз. Оны классикалық шешім деп атаймыз. Бірақ, физикалық және басқа да есептерде бастапқы мән, шекаралық мән жеткілікті тегіс бола алмайды, сондықтан есепті шешкен кезде жеткілікті тегіс болатын шешім болуына күмән келтіреді. Сонымен, дифференциалдық теңдеулерге жалпылама шешім ұғымын енгіземіз. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпылама шешім теориясымен С.Л.Соболев, К.О.Фридрихс, Л.Шварц айналысқан.

Жалпылама шешімді екі тәсілмен енгізуге болады:

1 тәсіл Жалпылама шешім классикалық шешімдер тізбегінің шегі түрінде анықталады.

2 тәсіл Дифференциалдық теңдеулер шекаралық, бастапқы мәндерімен бірге интегралдық қатынас түрінде беріледі.

Мысал

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

$$u(0,x)=\varphi(x) \tag{2}$$

Егер $\varphi(x)\in C^1[a,b]$ болса, онда $\Omega=\{x,t: a\le x+t\le b\}$ облысындағы (1),(2) есептің шешімі келесі түрде болады:

$$u(t,x)=\varphi(x+t). \tag{3}$$

Шынында да,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \varphi(x+t)\big|_{t=0}=\varphi(x).$$

Айталық, $\varphi(x)\in C[a,b]$ болсын, бірақ дифференциалданбасын. Онда (1),(2) есептің шешімін қалай анықтаймыз? Оны келесі түрде анықтаймыз: бұл функцияны $[a,b]$ аралығындағы туындысымен үзіліссіз, бірқалыпты жинақталатын $\varphi_k(x)$ тізбегінің шегі ретінде болатыны айқын. Сондықтан, (1) теңдеудің сәйкес $u_k(x,t)=\varphi_k(x,t)$ шешімі $\overline{\Omega}$ облысында (3) функцияға бірқалыпты жинақталады. Осы айтылған тұжырым жалпылама түсінікте $\varphi(x+t)$ функциясы (1) теңдеудің шешімі болуына негізделді.

Анықтама 1 Егер тегіс классикалық шешімдер тізбегі $\{u_k(x)\}$ табылып және ол $u(x)$ функциясына белгілі бір нормада жинақталса, яғни $C(\Omega)$ кеңістігінде $\sup\limits_{x\in\Omega}|u_k(x)-u(x)|\to 0,\ k\to\infty,$ ал $L_2(\Omega)$ кеңістігінде $\int\limits_{\Omega}|u_k(x)-u(x)|^2\,dx\to 0,$ $k\to\infty,$ онда $u(x),\ x\in\Omega\subset R^n$ функциясы Ω облысындағы дифференциалдық теңдеудің жалпылама шешімі деп аталады.

L_2 кеңістігіндегі жалпылама шешім үзілісті болатыны айқын. Шекке ұмтылуды басқа да функционалдық кеңістіктер нормасымен анықтауға болады.

Шешім ұғымы кеңейтілгендіктен жалпылама шешімнің жалғыздығын дәлелдеу керек және бастапқы, шекаралық мәндерді қай мәнде қанағаттандыратынын білуіміз керек.

Сызықтық эллиптикалық және параболалық теңдеулер үшін жеткілікті тегіс коэффициенттер, бастапқы және шекаралық мәндері болса, онда жалпылама шешім ұғымын кіргізудің қажеті жоқ. Бірақ, егер осы теңдеулерде тегіс емес коэффициенттер, бастапқы және шекаралық мәндері болса, онда жалпылама шешімді енгіземіз, өйткені классикалық шешім табылмауы мүмкін.

Жалпылама шешімді басқаша енгізу үшін интегралдық тепе-теңдікті қолданамыз. Бұл екінші тәсіл арқылы ұғымдарды кеңейтеміз, осының негізінде жалпылама функция ұғымын аламыз.

Анықтама 2 Айталық, келесі түрдегі диффференциалдық теңдеу берілсін:

$$Lu\equiv\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x),\quad x\in\Omega, \tag{4}$$

мұндағы $a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega),\quad f(x)\in D'(\Omega),$ яғни $f(x)-D'$ облысындағы жалпылама функция.

$\forall\varphi(x)\in D$ үшін келесі теңдік орындалса

$$\left(u,\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha,\varphi)\right)=(f,\varphi), \tag{5}$$

онда $u(x) \in D'$ жалпылама функциясы $Lu = f$ теңдеуінің Ω облысындағы жалпылама шешімі деп аталады.
Егер $u(x)$, $f(x)$ функциялары локалды интегралданатын функциялар болса, онда соңғы теңдіктегі функционал сәйкес интеграл түрінде беріледі, яғни (4) теңдеуді φ функциясына көбейтіп, Ω облысы бойынша бөліктеп интегралдаймыз.

Жоғарыда айтылған жалпылама шешімдерде екі проблема бар:
1. Дифференциалдық теңдеудің жалпылама шешімін тапқан кезде шекаралық шартты ескеру керек. Жалпылама шешім бастапқы және шекаралық шарттарды қай мағынада қанағаттандырады? Егер функция n өлшемді облыс бойынша Лебег мағынасында интегралданатын функция болса, онда осы өлшемнен кем көпбейнеде анықталмауы мүмкін.
2. Шешім ұғымын кеңейткеннен кейін жалпылама шешімнің жалғыздығын дәлелдеу қиын.

§ Соболевтің жалпылама туындылары және оның қасиеттері

$\Omega \subset R^n$ (шенелген немесе шенелмеген) облысты және $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясын қарастырайық, яғни $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ және Ω облысында компакт тұғыры бар: $x \in \Omega \setminus K$ үшін $\varphi(x) = 0$, мұнда $K - \Omega$ облысындағы компакт облыс. Онда тегіс $u(x)$ функциясы үшін бөліктеп интегралдау формуласы бойынша келесі теңдік орынды:

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x} \varphi dx = (-1) \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx.$$

Бұл формула жалпылама туындының негізі ретінде алынады. Айталық, $u(x)$, $\omega_i(x) -$ жай функциялар типтес жалпылама функциялар болсын, яғни

$$u(x), \quad \omega_i(x) \in L_{1,loc}(\Omega) = \left\{ \upsilon(x) \middle| \forall K \subset \Omega, \int_K |\upsilon(x)| dx < \infty \right\}.$$

Анықтама1 Егер $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін $\omega_i(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы табылса және келесі теңдік орындалса:

$$\int_\Omega \omega_i(x) \varphi(x) dx = (-1) \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

онда $\omega_i(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясының 1 ретті жалпылама туындысы деп аталады және $\omega_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{1,loc}(\Omega)$ арқылы белгіленеді. Осылайша, кез келген α ретті жалпылама туындыларды анықтауға болады, мұндағы $\alpha = \alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n -$ мультииндекс.

Анықтама $1'$ Егер $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_\Omega \omega_\alpha(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

(1)

тепе-теңдік орындалса, онда $\omega_\alpha(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы деп аталады және $\omega_\alpha(x) = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \quad \partial x_2^{\alpha_2} \quad \ldots \quad \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv D^\alpha u$ арқылы белгіленеді.

Жалпылама туынды - классикалық туындының кеңейтілуі болатыны айқын.

Лемма 1 Айталық, $\Omega \subset R^n$ және $D^\alpha u(x) \in C(\Omega)$ болсын. Яғни Ω -ның әрбір нүктесінде жай туындысы болса, онда $D^\alpha u$ функциясы $u(x)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы болады.

Дәлелдеуі: (1) тепе-теңдіктен шығады.

Лемма 2 $u(x)$ функциясының жалпылама туындысы эквивалентті класс дәлдікпен жалғыз болады.

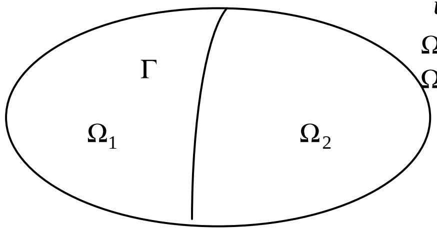
Дәлелдеуі: Айталық, $\Omega \subset R^n$, $\alpha \neq 0$ және $u(x)$, $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциялары және
$\upsilon_1 = D^\alpha u$, $\upsilon_2 = D^\alpha u$ болсын. υ_1 және υ_2 функцияларының Ω облысында эквивалентті болатынын көрсетейік. $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_\Omega \upsilon_1 \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} dx$$
$$\int_\Omega \upsilon_2 \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha u dx$$

тепе-теңдіктері орынды. Бұдан $\int_\Omega (\upsilon_1 - \upsilon_2)\varphi dx = 0;$ вариациялық қисап курсынан Ω облысында нөл өлшемді дәлдікпен $\upsilon_1 = \upsilon_2$, яғни υ_1 және υ_2 функциялары Ω облысында эквивалентті.

Жалпылама туындылар классикалық туындылардың кейбір қасиеттерін сақтайды. **Негізгі қасиеттері** жалпылама туындылардың анықтамасынан тікелей шығады.

1. (Сызықтық қасиеті) Егер u_1 және u_2 функцияларының Ω облысында жалпылама туындылары болса, онда $C_1u_1 + C_2u_2$ қосындының да Ω облысында жалпылама туындылары бар, яғни $D^\alpha(C_1u_1 + C_2u_2) = C_1D^\alpha u_1 + C_2D^\alpha u_2$, мұнда C_1, C_2 – тұрақтылар.
2. Егер Ω облысында $\upsilon = D^\alpha u$ жалпылама туынды болса, ал Ω облысында $\omega = D^l \upsilon$ жалпылама туындысы болса, онда $\omega = D^{\alpha + l} u$ болады.
3. Жалпылама туынды анықтамасы бойынша
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \partial x_2^{\alpha_2} \ \ldots \ \partial x_n^{\alpha_n}}$ дифференциалдың ретінен тәуелсіз.
Бірақ, жалпылама туындыға классикалық туындының барлық қасиеттері орындалмайды.
4. $\dfrac{\partial(u_1 \cdot u_2)}{\partial x_i}$ дифференциалдың көбейтіндісі орындалуы үшін қосымша шарттар қоюымыз керек: u_k, $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, $k = 1{,}2$ немесе жалпы жағдайда u_1, $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} \in L_{p,loc}(\Omega)$ болса, онда қажетті шарт u_2, $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} \in L_{p',loc}(\Omega)$ орындалуы керек, мұнда $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$ Бұл Гельдер теңсіздігінен шығады. Сондықтан, $\dfrac{\partial(u_1 \cdot u_2)}{\partial x_i} = u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} + u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}$, $i = 1, \ 2, \ \ldots \ n.$
5. $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \partial x_2^{\alpha_2} \ \ldots \ \partial x_n^{\alpha_n}}$ жалпылама туындысы болса, бұдан төменгі ретті жалпылама туындысы бар деп айтуға болмайды. Осы фактларды "Соболевтің енгізу теоремалары" анықтайды.
6. $u \in D^\alpha(\Omega)$ болса, онда $u \in D^\alpha(\Omega')$, мұнда $\Omega' \subset \Omega$.. Ω облысы үш бөлікке бөлінеді: Ω_1 және Ω_2, Γ.



Анықтама 2 Айталық; $\Omega \subset R^n$, $\alpha = \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n$, $\alpha \neq 0$ болсын. Егер $L_{1,loc}(\Omega)$ кеңістігінде $\forall u_n(x) \in C^\infty(\Omega)$: $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} u(x)$, $D^\alpha u_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \omega_\alpha(x)$ шарттары орындалса, онда $\omega_\alpha(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы деп аталады.

$L_{1,loc}(\Omega)$ кеңістігінде $u_k(x) \to u(x) \ \Leftrightarrow \ \lim\limits_{k\to\infty} \|u_k(x) - u(x)\|_{L_1(\Omega)} = 0$, $\forall K \subset \Omega -$ Ω облысындағы компакт облыс болады.

Анықтама 3 $\Rightarrow$ Жалпылама дифференциал амалы $C^\infty(\Omega)$ кеңістігінде берілген функцияның жай дифференциалдық амалының $L_{1,loc}(\Omega)$ мағынасындағы минималь тұйық кеңейтілуі болады.

§ Жалпылама функцияның жалпылама туындысының анықтамасы

Жалпылама функциялар теориясында жалпылама функциядан алынған жалпылама туынды сызықтық функционал ретінде анықталады.

Егер $\forall \varphi(x) \in D(\Omega)$ үшін

$$\left(D^{\alpha}u, \varphi(x)\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(u(x), D^{\alpha}\varphi(x)\right) \tag{1}$$

теңдігі орындалса, онда $D^{\alpha}u$ функциясы $u(x) \in D'(\Omega)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы деп аталады.

Егер $D^{\alpha}u$, $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$, яғни регулярлы жалпылама функциялар болса, онда (1) функцонал келесі түрде болады:

$$\int\limits_{\Omega} D^{\alpha}u\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} u(x)D^{\alpha}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Бұл Соболев мағынасындағы жалпылама туындысының анықтамасы. Яғни $u(x)$, $D^{\alpha}u(x)-$ локалды интегралданатын функциялар болса, жалпылама функцияның жалпылама туындысы Соболев мағынасындағы жалпылама туындысымен беттеседі.

$W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі және оның қасиеттері

Анықтама $u(x), \quad x \in \Omega \subset R^n$ функциялар жиынын қарастырайық және келесі шарттар орындалсын:

1) $u(x) \in L_2(\Omega)$;

2) $\forall i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n, \quad \exists \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – жалпылама туындысы және $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad i = \overline{1, n}$.

Осы функциялар жиынына келесі түрдегі норманы енгізейік.

$$\|u\| = \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

және 2) $\Rightarrow$ осы жиынның элементтері үшін (1) норма әруақытты да ақырлы шама болады. Бұл жиын (1)

нормамен $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп аталады және $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ немесе $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$, $\|u\|_{W^{2,1}(\Omega)}$ түріндегі белгілеулер қалыптасқан.

Ескерту $L_2(\Omega) \subset L_{1,loc}(\Omega)$ болатындығын көрсетейік: Айталық, $u(x) \in L_2(\Omega)$ болсын. Онда $\forall K \subset \Omega$ компакт үшін $\int_K |u(x)| dx < \infty$ дұрыс. Шынында да, $\forall K \subset \Omega$ компакт және Коши-Буняковский теңсіздігінің көмегімен $\int_K |u(x)| dx \le \left(\int_K dx \right)^{1/2} \left(\int_K |u|^2 dx \right)^{1/2} = (mesK)^{1/2} \cdot C$ яғни $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ аламыз.

$W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде Гильберттік құрылымды кіргізуге болады. Яғни, $\forall u(x), \quad \upsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$ функциялары үшін сан сәйкес қоямыз:

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} + u \cdot \upsilon \right] dx = \{u, \upsilon\} \qquad (2)$$

Онда $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі – нақты Гильберттік кеңістік және (2) скалярлық көбейтінді келесі қасиеттерге ие:

1. Симметриялық қасиеті: $\{u, \upsilon\} = \{\upsilon, u\}$;
2. Дистрибутивтік қасиеті: $\{u, \upsilon_1 + \upsilon_2\} = \{u, \upsilon_1\} + \{u, \upsilon_2\}$;
3. Біртектілік қасиеті: $\{\lambda u, \upsilon\} = \lambda \{u, \upsilon\}$, мұнда λ – нақты сан $\left(\lambda \in R^1\right)$;
4. Теріс еместігі: $\{u, u\} \ge 0$ және $\{u, u\} = 0$ теңдігі тек қана $u = 0$ (барлық дерлік) болғанда орындалады.

§ $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігінің толық екенін дәлелде.

Анықтама $u(x), \quad x \in \Omega \subset R^n$ функциялар жиынын қарастырайық және келесі шарттар орындалсын:

1) $u(x) \in L_2(\Omega)$;

2) $\forall i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n, \quad \exists \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – жалпылама туындысы және $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad i = \overline{1, n}$.

Осы функциялар жиынына келесі түрдегі норманы енгізейік.

$$\|u\| = \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

және 2) $\Rightarrow$ осы жиынның элементтері үшін (1) норма әруақытта да ақырлы шама болады. Бұл жиын (1) нормамен $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп аталады.

Сұрақ $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі толық кеңістік бола ма?

Теорема (1) нормаға қатысты $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі толық метрикалық кеңістік болады.

Дәлелдеуі $\{u_k(x)\}$, $u_k(x)\in W_2^1(\Omega)$ тізбегін қарастырайық және оны $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде фундаменталды деп ұйғарайық, яғни $\|u_k-u_l\|_{W_2^1(\Omega)}\to 0,\quad k,l\to\infty.$.

Онда (1) норма анықтамасынан

$$\int_\Omega (u_k(x)-u_l(x))^2dx\to 0,\quad \int_\Omega\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2dx\to 0,\quad k,l\to\infty,\quad \forall i=1,\dots,n$$

шығады.

Бірақ, $L_2(\Omega)-$толық кеңістік, сондықтан $u(x)$, $\omega_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ функциялары табылып $u(x)$, $\omega_i(x)\in L_2(\Omega)$ және

$$\int_\Omega (u_k(x)-u(x))^2dx\to 0,\quad k\to\infty \tag{2}$$

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\omega_i(x)\right)^2dx\to 0,\quad k\to\infty,\quad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

$\omega_i(x)=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ Соболев мағынасындағы жалпылама туынды болатынын көрсетейік. $u_k(x)$ функциясының жалпылама туындысы бар: $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\in L_2(\Omega)\subset L_{1,loc}(\Omega)$, онда $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_\Omega\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi(x)dx=(-1)\int_\Omega u_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx \tag{4}$$

теңдігі орындалады.

(2), (3) тізбектердің жинақтылығынан келесі теңдіктерді аламыз:

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi dx=\int_\Omega\omega_i\varphi dx \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx. \tag{6}$$

(4) тепе-теңдіктен шекке көшіп, (5), (6) теңдіктерден

$\displaystyle\int_\Omega\omega_i(x)\varphi(x)dx=(-1)\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx\quad\Rightarrow\quad\omega_i(x)=\frac{\partial u}{\partial x_i}$ Соболев мағынасындағы жалпылама туындысын аламыз. Бұдан $u(x)\in W_2^1(\Omega)$. Егер (3)-тегі ω_i функциясының орнына $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$-ті қойып және (2) пен (3) қоссақ, онда $W_2^1(\Omega)$ нормасындағы жинақтылықты аламыз: $\|u_k-u\|_{W_2^1(\Omega)}\to 0,\quad k\to\infty.$ Бұл $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің толықтығын көрсетеді. Теорема дәлелденді.

§ $W_p^l(\Omega)$ Соболев кеңістігі

$W_2^1(\Omega)$ кеңістігіне ұқсас етіп $W_p^l(\Omega)$ кеңістігін енгізуге болады. p дәрежесімен интегралданатын, бүтін l ретке дейінгі жалпылама туындылары бар $u(x)\in L_p(\Omega)$, $1\le p<\infty$ функциялар жиынын қарастырайық.

Осы жиында келесі норманы енгізейік:

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)}=\left\{\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le l}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \dots\ \partial x_n^{\alpha_n}}\right|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{1}$$

Бұл кеңістік $W_p^l(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп аталады.

$W_p^l(\Omega)$ Банах кеңістігі, оның толықтығы $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің толықтығына ұқсас дәлелденеді.

$p=2$ болса $W_p^l(\Omega)$ кеңістігі келесі түрдегі скаляр көбейтіндімен Гильберттік кеңістік құрайды:

$$\{u,\upsilon\}_{W_2^l(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le l} D^\alpha u D^\alpha \upsilon dx.$$

Бұл жағдайда $W_2^l(\Omega)$ кеңістігін $H^l(\Omega)$ белгілейді.

$C^\infty(\Omega)$ жиынның функциясын алып, (1) нормамен тұйықтап $W_p^l(\Omega)$, $p \ge 1$, $l \ge 1$ Соболев кеңістіктерін алуға болады. Функция осы тұйықтауда жатады және $\widehat{W}_p^l(\Omega)$ кеңістігін анықталады.. Ω облысының шекарасы ”жаман емес” болса, $W_p^l(\Omega)$ кеңістігі $\widehat{W}_p^l(\Omega)$ кеңістігімен беттеседі. Бұл жерде “жұлдызды облыстар” және жұлдызды облыстардың ақырлы қосындысы деген ұғымды келтіреміз:

Анықтама Егер $x_0 \in \Omega$ ішкі нүктесі табылып, осы нүктеден шыққан радиус-векторлар облыстың шекарасымен бір ғана ортақ нүктесі болса, онда Ω облысы “жұлдызды облыс” (немесе x_0 нүктесіне қатысты жұлдызды облыс)деп аталады. Егер $B_r \subset \Omega$ шардың әрбір нүктесіне қатысты жұлдызды облыс болса, онда B_r шарына қатысты жұлдызды облыс болады.

§ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі және оның эквивалентті нормалары

Анықтама $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтауын $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі деп аталады. Мұнда $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ белгілеудегі жоғарыдағы нөлі функцияның финиттігін білдірмейді, $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтаудағы ”нөлдік шекаралық шарттарды” ($u(x)$ $L_2(\Omega)$ -дегі ”орташа”) білдіреді.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің меншікті ішкі кеңістігі болады. Анықтамасынан $\Rightarrow$

$\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін $\{\upsilon_k(x)\}$, $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялар тізбегі табылып,

$$\|\upsilon_k - u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(\upsilon_k - u)}{\partial x_i} \right|^2 + (\upsilon_k - u)^2 \right] dx \to 0, \ k \to \infty.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістіктерінің негізгі қасиеттерін келтірейік.

Айталық, $\Omega \subset R^n$ шенелген облыс болсын. Норма енгізсек, $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің нормасына эквивалентті норма аламыз.

Ескерту Егер барлық $u(x) \in X$ функциясы үшін C_1, $C_2 > 0$ тұрақтылары табылып,

$$C_1\|u\|_2 \le \|u\|_1 \le C_2\|u\|_2$$

теңсіздігі орындалса, онда X кеңістігінде $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ нормалары эквивалентті деп аталады.

$\{u_k(x)\}$ функциялар тізбегі бір нормада жинақты болса, оның эквивалентті нормасында да жинақталатыны айқын.

§ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі. Фридрихс теңсіздігі.

Анықтама $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтауын $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі деп аталады. Мұнда $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ белгілеудегі жоғарыдағы нөлі функцияның финиттігін білдірмейді, $C_0^\infty(\Omega)$ функциялар жиынын $W_2^1(\Omega)$ нормасымен тұйықтаудағы "нөлдік шекаралық шарттарды" ($u(x)$ $L_2(\Omega)$ -дегі "орташа") білдіреді.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің меншікті ішкі кеңістігі болады. Анықтамасынан $\Rightarrow$

$\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін $\{\upsilon_k(x)\}$, $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялар тізбегі табылып,

$$\|\upsilon_k - u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(\upsilon_k - u)}{\partial x_i} \right|^2 + (\upsilon_k - u)^2 \right] dx \to 0, \ k \to \infty.$$

Айталық, $\Omega \subset R^n$ шенелген облыс болсын. Норма енгізсек, $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің нормасына эквивалентті норма аламыз.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі $W_2^1(\Omega)$ кеңістіктерінің нормаларының эквиваленттігін көрсетуі үшін Фридрихс теңсіздігін дәлелдейміз.

Фридрихс теоремасы Айталық, $\Omega \subset R^n$ шенелген облыс болсын. Онда $C = C(\Omega)$ тұрақтысы табылып, $\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздік орынды:

$$\int_\Omega u^2 dx \le C(\Omega) \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \tag{1}$$

Немесе

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C_1(\Omega) \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)},$$

мұнда $C(\Omega)$, $C_1(\Omega)$ тұрақтылары $u(x)$ функциясынын тәуелді емес, ал Ω облысының өлшеміне тәуелді.

Дәлелдеуі (1) теңсіздікті $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясына көрсетсек жеткілікті, себебі оны тұйықтау арқылы $\forall u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін дәлелденеді. Айталық, $u(x)$ фукциясы $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігіндегі қандай да бір элементі болсын. Оны $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігінен $\{\upsilon_k(x)\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ функциялар тізбегіне $W_2^1(\Omega)$ нормасында аппроксимациялаймыз. (1) теңсіздік $\upsilon_k(x)$ функциясы үшін орындалсын:

$$\int_\Omega (\upsilon_k)^2 dx \le C(\Omega) \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \right)^2 dx \tag{2}$$

(2) теңсіздіктен $W_2^1(\Omega)$ нормасы арқылы $k \to \infty$ шекке көшсек, оң және сол жағының шектері бар, онда (1) теңсіздік $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы үшін орындалады. Бұл процедура "$W_2^1(\Omega)$ нормасы арқылы тұйықтау" деп аталады.

Айталық, $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ болсын. $\upsilon_k(x)$ функцияның тұғыры $\Omega -$ да жатады, онда $\upsilon_k(x)$ функциясын нөлмен жалғастыруға болады және $\Omega -$ ның орнына $\Pi \subset \Omega$ параллелепипед қарастыруға болады.

$$\Pi = \{x: \ 0 < x_i < d_i\}.$$

Айталық, $d_1 -$ қырлардың ең кішісі болсын. $\upsilon_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\upsilon_k(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \upsilon_k(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n)}{\partial y_1} dy_1.$$

Бұл теңдіктің екі жағын квадраттап және Π облыс бойынша интегралдаймыз:

$$\int_{\Pi} \upsilon_k^2(x)dx = \int_0^{d_1} dx_1 \int_{\Pi'} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial \upsilon_k(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 dx',$$

мұнда $\Pi' = \{x: \ (x_2, \ \ldots, \ x_n) \ \ 0 < x_i < d_i, \ \ i = \overline{2,n}\}$.

Оң жақтағы бірөлшемді интегралды Коши-Буняковский теңсіздігінің көмегімен бағалаймыз:

$$\left(\int_0^{x_1} \frac{\partial \upsilon_k(y, x')}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 \le x_1 \int_0^{d_1} \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_1} \right)^2 dy_1.$$

Сондықтан

$$\int_{\Pi} \upsilon_k^2 dx \le \frac{d_1^2}{2} \int_{\Pi'} \int_0^{d_1} \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_1} \right) dy_1 = \frac{d_1^2}{2} \int_{\Pi} \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_1} \right)^2 dx \le \frac{d_1^2}{2} \int_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \right)^2 dx.$$

Немесе $\Omega -$ ден тысқары $\upsilon_k(x) \equiv 0$, онда

$$\int_{\Omega} \upsilon_k^2 dx \le \frac{d_1^2}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_1} \right)^2 dx. \qquad (3)$$

Сонымен, $\{\upsilon_k(x)\} \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы $u(x)$ функциясын $W_2^1(\Omega)$ нормасы арқылы аппроксимациялайды. Онда

$\upsilon_k(x) \to u(x), \quad L_2(\Omega) -$ де, $\dfrac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad L_2(\Omega) -$ де (3) шекке көшсек, (1) Фридрихс теңсіздігін аламыз:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{d_1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема дәлелденді.

Орта функциялар және оның қасиеттері. Олардың шексіз дифференциалдануы.

L_p -да орталау операциясын анықтау үшін орталау ядросы ұғымын енгіземіз. Ол үшін келесі қасиеттерге ие теріс емес $\omega(x)$ функциясын қарастырайық:

1). $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\mathrm{supp}\, \omega(x) \subset \overline{B_1} = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$;

3). $\int_{R^n} \omega(x) dx = 1$.

Орталау ядросы деп орталау радиусы $h > 0$

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \qquad (1)$$

болатын функцияны атаймыз.

$\omega(x)$ функциясының (1)-(3) қасиеттерінен орталау ядросының қасиеттері шығады:

1). $\omega_h(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\mathrm{supp}\, \omega_h(x) \subset \overline{B_h}(x) = \{x \in R^n : |x| \le h\}$;

3). $\int_{R^n} \omega_h(x) dx = 1$.

Бұл қасиет келесі түрде дәлелденеді: $\dfrac{x}{h} = y \ \Rightarrow \ dx = h^n dy.$

$$\frac{1}{h^n} \int_{R^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) dx = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} \omega(y) h^n dy = \int_{R^n} \omega(y) dy = 1.$$

Анықтама. Айталық, $\varphi \in L_p(\Omega), \ 1 \le p < \infty$ болсын. φ функциясын Ω -дан тысқары нөлмен жалғастырамыз. Жалғастырылған функцияны осы белгілеуді қалдырамыз. $\varphi(x)$ функциясының $\varphi_h(x)$ орталау функциясын деп мына $\omega_h(x)$ орталау ядросымен берілген үйірткіні айтамыз:

$$\varphi_h(x)=\varphi*\omega_h=\int_{R^n}\omega_h(x-y)\varphi(y)dy=\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)\varphi(y)dy \qquad (2)$$

$B_h(x)$ -радиусы h, центрі x нүктесі болатын шар.

Орта функциялардың $L_p(\Omega)$ кеңістігінде жинақталуы

$L_p(\Omega)$ нормасында $\varphi_h(x)$ орта функциясы $\varphi(x)$ функциясына жинақталады, яғни, $\forall\varphi(x)\in L_p(\Omega),\ 1\le p<\infty$.үшін

$$\|\varphi_h-\varphi\|_{L_p(\Omega)}\to 0,\quad h\to 0,\ \forall\varphi\in L_p(\Omega)$$

және $h>0$ болғанда

$$\|\varphi_h\|_{L_p(\Omega)}\le\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \qquad (3)$$

теңсіздігі орынды.

Алдымен (3) теңсіздікті **дәлелдейік**. $\varphi_h(x)$ орта функциясын келесі түрде жазайық:

$$\varphi_h(x)=\int_{R^n}\omega_h^{\frac{1}{p}}(x-y)\varphi(y)\omega_h^{\frac{1}{q}}(x-y)dy=\left|\begin{array}{l}.\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\\ \text{Ãåëüäåð}\\ \text{ò. ê}\end{array}\right|\le$$

$$\le\left(\int_{R^n}\omega_h(x-y)|\varphi(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{R^n}\omega_h(x-y)dy\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)|\varphi(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}};$$

Алынған теңсіздіктің екі жағында p дәрежеге шығарып, Ω облысында интегралдаймыз. Бұдан

$$\|\varphi_n(x)\|^p_{L_p(\Omega)}\le\int_\Omega\left(\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)|\varphi(y)|^p dy\right)^{\frac{p}{p}}dx$$

$\omega_h(x)$ ядросы $B_h(x)$ - тан тысқарыда нөлге тең, ал Ω - ның тысқары $\varphi=0$. Онда облыстың ішкі интегралында $B_h(x)$ -ты Ω -ға алмастырып және интегралдау ретін өзгертіп, Фубини теоремасын қолдану арқылы келесі теңсіздікті аламыз:

$$\|\varphi_n(x)\|^p_{L_p(\Omega)}\le\int_\Omega|\varphi(y)|^p dy\int_\Omega\omega_h(x-y)dx=\|\varphi\|^p_{L_p(\Omega)}\quad\Rightarrow\quad\|\varphi_n\|_{L_p(\Omega)}\le\|\varphi\|_{L_p(\Omega)}.$$

$p=1$ болғанда, (3) бағалау Гельдер теңсіздігінсіз алынады.

$L_p(\Omega)$ -да $h\to 0$ болғанда $\varphi_h(x)$ орта функцияның $\varphi(x)$ функциясына жинақтылығы $L_p(\Omega)$ кеңістігіндегі орташа үзіліссіздік бойынша дәлелденеді, яғни,

$$\sup_{|z|\le\delta}\|\varphi(x+z)-\varphi(x)\|_{L_p(\Omega)}\le\varepsilon(\delta)\to 0 \text{ при } \delta\to 0 \qquad (4)$$

$$\varphi_h(x)-\varphi(x)=\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)[\varphi(y)-\varphi(x)]dy\le\left|\begin{array}{l}.\text{Ãåëüäåð}\\ \text{ò}-\text{ê}\end{array}\right|\le$$

$$\le\left(\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)|\varphi(y)-\varphi(x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)dy\right)^{\frac{1}{q}}\Rightarrow$$

$$\int_\Omega|\varphi(y)-\varphi(x)|^p dx\le\int_\Omega\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)|\varphi(y)-\varphi(x)|^p dydx=\int_\Omega\left(\int_{|x-y|\le h}\omega_h(x-y)|\varphi(y)-\varphi(x)|^p dy\right)dx\le$$

$$\le \begin{vmatrix} y-x=z \\ y=x+z \\ dy=dz \end{vmatrix} = \int\limits_{|z|\le h} \omega_h(z) \int\limits_{\Omega} |\varphi(x+z)-\varphi(x)|^p \, dxdy \le \left(\sup\limits_{|z|\le h} \| \varphi(x+z)-\varphi(x) \|_{L_p} \right)^p \int\limits_{|z|\le h} \omega_h(z)dz =$$

$$= \left(\sup\limits_{|z|\le h} \| \varphi(x+z)-\varphi(x) \|_{L_p} \right)^p, \quad \Rightarrow$$

$$\| \varphi_h(x)-\varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \le \sup\limits_{|z|\le h} \| \varphi(x+z)-\varphi(x) \|_{L_p} \le \varepsilon(h) \to 0 \ , \quad h \to 0.$$

$$\| \varphi_h(x)-\varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \to 0 \ , \quad h \to 0. \ \| u \|_{L_2(\Omega)} \le \frac{d_i}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L_2(\Omega)}$$

теорема дәлелденді.

Ескерту. Фридрихс теңсіздігі «ақырлы қалыңдықтар» облысында, яғни, бір бағыт бойынша шектелген облыстар үшін орындалады. $O\xi_i$ бағыты Ω облысы проекциясының минималь диаметрі осы облыстың «қалыңдығы» деп аталады.

Шынында, Ω $O\xi -$ге проекциясы шектелген және қалыңдығы $d -$ға тең болатын $O\xi$ бағыты бар болады. Онда

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\xi, x_i)$$

және

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \le \frac{d}{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \le C_2 d \left(\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = C_2 d \, \| \frac{\partial u}{\partial \xi} \|_{L_2(\Omega)}$$

мұндағы C_2 тек n -ге тәуелді.

Сонымен біз, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ -де Ω шектелген облысы төмендегі норма болған жағдайында көрсеттік, яғни

$$\| u \|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))} = \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

бұған эквивалент норманы қарастырсақта болады:

$$\| u \|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ кеңістіктері гильберттік болғандықтан, оларды кейде сәйкес $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ түрде жазады.

$L_p(\Omega)$-дағы функцияларды тегіс функциялармен апроксимациялауды қандай әдіспен алуға болатынын көрсетейік. Бұл мақсаттың астарында «орта функциялар»деп аталатын ұғым жатыр. Олар L_p функцияларын тегістеу әдісін береді.

Орта функциялар және олардың қасиеттері: шексіз дифференциалдану, L_p нормасында жинақтылығы, дифференциалдау және орталау операцияларының алмастыруы.

Орталау ядросы жән оның қасиеттері.

L_p -да функцияларды орталауды (тегістеу) анықтау үшін, орталау ядросы ұғымын енгіземіз. Ол үшін келесі қасиеттерге ие теріс емес $\omega(x)$ функциясын карастырайық:

1). $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\operatorname{supp} \omega(x) \subset \overline{B_1} = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$;

3). $\int\limits_{R^n} \omega(x)dx = 1$.

Мысал ретінде мына функцияны алайық:

$$\omega(x) = \begin{cases} \kappa \exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right\}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Бұл жерде $\kappa = \left\{\int\limits_{R_n} \exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2-1}\right\}dx\right\}^{-1}$. $\omega(x)$ функциясы (1)-формуламен берілген және (1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын функция. (2)-(3) шарттар айқын. $\omega(x)$ функциясы шексіз дифференциалданатынын және $|x| = 1$ сферасында өзінің кез келген ретті туындысын қоса алғанда нөлге айналатынын тексерейік. Шынында,

$$D^\alpha \exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} = \frac{\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right) \cdot P_\alpha(x)}{(|x|^2-1)^{2|\alpha|}},$$

$P(x)$ -көпмүшелік. Онда мынаны аламыз:

$$\lim_{|x| \to 1} D^\alpha \exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} = 0, \quad \forall \alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n.$$

Орталау ядросының орталау радиусы $h > 0$ деп

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n}\omega\left(\frac{x}{h}\right) \qquad (2)$$

$\omega(x)$ функциясының (1)-(3) қасиеттерінен орталау ядросының қасиеттері шығады:

1). $\omega_h(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2). $\operatorname{supp} \omega_h(x) \subset \overline{B_h}(x) = \{x \in R^n : |x| \le h\}$;

3). $\int\limits_{R^n} \omega_h(x)dx = 1$.

$h > 0$ орталау ядросының радиусы.

3). Бұл қасиет келесі түрле дәлелденеді: $\dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{h} = y. \;\; \Rightarrow \;\; dx = h^n dy.$

$$\frac{1}{h^n}\int\limits_{R^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right)dx = \frac{1}{h^n}\int\limits_{R^n} \omega(y)h^n dy = \int\limits_{R^n} \omega(y)dy = 1.$$

$n = 1$ болғанда $\omega_h(x)$ функциясының графигі

Анықтама Орта функциялар.

$\varphi \in L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ болсын. φ функциясын Ω -дан тысқары нөлмен жалғастырамыз. Функцияларды жалғастыру үшін бұрынғы белгілеуді қалдырамыз.

$\varphi(x)$ үшін $\omega_h(x)$ орталау ядросы ретінде анықталатын $\varphi_h(x)$ орталау функциясын айтамыз, мына формуламен жазылады:

$$\varphi_h(x) = \varphi * \omega_h = \int\limits_{R^n} \omega_h(x-y)\varphi(y)dy = \int\limits_{B_h(x)} \omega_h(x-y)\varphi(y)dy \qquad (3)$$

$B_h(x)$ -радиусы h, центрі x нүктесі болған шар.

Мысал келтірейік. Айталық, $n=1$ және үзілісті функцияны қарастырайық:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

Бұл функция үшін (3)-формула бойынша орталауды (тегістеуді) анықтайық.

Тегіс $\varphi_h(x)$ үшін

1). $\varphi_h(x)=0, \quad |x|\geq 1+h$; бұл жағдайда $\sup p\,\varphi_h(x)\cap B_h(x)=\varnothing$

2). $\varphi_h(x)=1, \quad |x|\leq 1-h$; онда $\sup p\,\varphi_h(x)\cap B_h(x)=B_{h-1}(x)$

$\dfrac{x-y}{h}=z; \quad x-y=hz;$ $\qquad$ x-$y\leq h$, $|x-y|\leq h$;
x-$h\leq y$, $-x+y\geq h, \quad x-y\leq h$;

алмастыруынан соң:

$$\varphi_h(x)=\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\omega_h\left(\frac{x-y}{h}\right)dy=\frac{1}{h}\int_{1}^{-1}\omega_h(z)(hdz)=-\frac{h}{h}\int_{1}^{-1}\omega_h(z)dz=\int_{1}^{-1}\omega_h(z)dz=1$$

Орта функциялардың қасиеттері.

1). Егер $dist(x,\partial\Omega)\geq h$ болса, онда (3)-формуладағы интегралдық функция $B_h(x)$ шардың сыртында нөлге тең, яғни $\varphi_h(x)=0$. Бірақ, егер $\varphi(x)\in C(\overline{\Omega})$ болса, $\varphi(x)=0$ $\partial\Omega$-да, атап айтқанда $\partial\Omega$-да $\varphi_h(x)\neq 0$ болады: $\varphi(x)$ функциясында шекаралық нөлдік мәндері оны орталағанда бекіп қалмайды.

2). R^n кеңістігінде $\varphi_h(x)$ үзіліссіз және кез келген ретті туындысы да үзіліссіз, яғни $\varphi_h(x)\in C^{\infty}(R^n)$.

$\varphi_h(x)$ функциясының үзіліссіздігін дәлелдейік. $x+\Delta x=x_1,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n$, $\forall i=1,...,n$ болсын. Гельдер теңсіздігін және орталау ядросының бірқалыпты үзіліссіздігінен

$$\varphi_h(x+\Delta x)-\varphi_h(x)=\int_{R^n}\left[\omega_h(x+\Delta x-y)-\omega_h(x-y)\right]\varphi(y)dy\leq\left|\begin{matrix}\text{. Ãåëüäåð}\\ \text{ò}-\text{ê}\end{matrix}\right|\leq$$

$$\leq\left(\int_{R^n}\left|\omega_h(x+\Delta x-y)-\omega_h(x-y)\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{R^n}^{\frac{1}{q}}\left|\varphi(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left|\begin{matrix}\text{îðòàëàó}\\ \text{ÿäðîñûíûí}\\ \text{á³ðêàëûïòû}\\ \text{óç³ë³ññ³çä³ã³íåí}\end{matrix}\right|\leq\varepsilon C_h\|\varphi\|_{L_p(\Omega)}$$

мұнда $C_h=[mesB_h(x)]^{\frac{1}{q}}$;

Дәл осылайша $\varphi_h(x)$ функциясы үзіліссіз. Туындының үзіліссіздігі осыған ұқсас дәлелденеді және орта функциялардың туындысы (3)-формуладағы орталау ядросын дифференциалдауды есептелінеді.

3). $L_p(\Omega)$ нормасында $h\to 0$ $\varphi_h(x)$ $\varphi(x)$-ке жинақталады, яғни, $\varphi\in L_p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$.

$\|\varphi_h-\varphi\|_{L_p(\Omega)}\to 0, \quad h\to 0$, $\forall\varphi\in L_p(\Omega)$

және $h>0$ болғанда

$$\|\varphi_h\|_{L_p(\Omega)}\leq\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \tag{4}$$

Алдымен (4)-теңсіздікті дәлелдейік. $\varphi_h(x)$ орта функциясын келесі түрде жазайық:

$$\varphi_h(x)=\int_{R^n}\omega_h^{\frac{1}{p}}(x-y)\varphi(y)\omega_h^{\frac{1}{q}}(x-y)dy=\left|\begin{matrix}.\dfrac{1}{\text{p}}+\dfrac{1}{\text{q}}=1,\\ \text{Ãåëüäåð}\\ \text{ò. ê}\end{matrix}\right|\leq$$

$$\leq\left(\int_{R^n}\omega_h(x-y)\left|\varphi(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{R^n}\omega_h(x-y)dy\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_{B_h(x)}\omega_h(x-y)\,|\,\varphi(y)\,|^p\ dy\right)^{\frac{1}{p}};$$

Алынған теңсіздіктің екі жағында p дәрежеге шығарып, Ω облысында интегралдаймыз. Бұдан

$$\| \varphi_n(x) \|^p_{L_p(\Omega)} \le \int_\Omega \left(\int_{B_h(x)} \omega_h(x-y) \, | \varphi(y) |^p \, dy \right)^{\frac{p}{p}} dx$$

$\omega_h(x)$ ядросы $B_h(x)$-тан тысқарыда нөлге тең, ал, Ω- ның сыртында $\varphi = 0$. Онда облыстың ішкі интегралында $B_h(x)$-ты Ω-ға алмастырып және интегралдау ретін өзгертеміз. Фубини теоремасын қолданып, мына формуланы аламыз:

$$\| \varphi_n(x) \|^p_{L_p(\Omega)} \le \int_\Omega | \varphi(y) |^p \, dy \int_\Omega \omega_h(x-y) dx = \| \varphi \|^p_{L_p(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad \| \varphi_n \|_{L_p(\Omega)} \le \| \varphi \|_{L_p(\Omega)} \, .$$

$p = 1$ болғанда, (4)-бағалау Гельдер теңсіздігінсіз алынады.

$L_p(\Omega)$-да $h \to 0$ болғанда $\varphi_h(x)$-тің $\varphi(x)$-ке жинақтылығы $L_p(\Omega)$-дағы орташа үзіліссіздік бойынша дәлелденеді, яғни,

$$\sup_{|z| \le \delta} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \le \varepsilon(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \tag{5}$$

$$\varphi_h(x) - \varphi(x) = \int_{B_h(x)} \omega_h(x-y) \left[\varphi(y) - \varphi(x) \right] dy \le \left| \begin{matrix} \text{. Ãåëüäåð} \\ \text{ò} - \text{ê} \end{matrix} \right| \le$$

$$\le \left(\int_{B_h(x)} \omega_h(x-y) \, | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_h(x)} \omega_h(x-y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow$$

$$\int_\Omega | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \, dx \le \int_\Omega \int_{B_h(\Omega)} \omega_h(x-y) \, | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \, dy dx = \int_\Omega \left(\int_{|x-y| \le h} \omega_h(x-y) \, | \varphi(y) - \varphi(x) |^p \, dy \right) dx \le$$

$$\le \left| \begin{matrix} y - z = z \\ y = x + z \\ dy = dz \end{matrix} \right| = \int_{|z| \le h} \omega_h(z) \int_\Omega | \varphi(x+z) - \varphi(x) |^p \, dx dy \le \left(\sup_{|z| \le h} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p} \right)^p \Rightarrow$$

$$\| \varphi_h(x) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \le \sup_{|z| \le h} \| \varphi(x+z) - \varphi(x) \|_{L_p} \le \varepsilon(h) \to 0 \ , \quad h \to 0.$$

$$\| \varphi_h(x) - \varphi(x) \|_{L_p(\Omega)} \to 0 \ , \quad h \to 0.$$

4). Келесі теорема орынды.

Теорема (Жалпылама туынды мен орталау операцияларының алмастырымдылығы).

Егер $\varphi(x)$ функциясы $D^\alpha \varphi$ түрде жалпылама туындысы бар болса, онда орта функциядан алынғын туынды орта функцияның жалпылама туындысына тең болады:

$$D^\alpha \varphi_n(x) = [D^\alpha \varphi(x)]_h \, , \quad \alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n \, , (7)$$

$$\forall x \in \Omega : \, dist(x, \partial\Omega) > h.$$

Яғни, кез келген $\Omega' \subset \Omega$ ішкі облысында орталау және дифференциалдау операциялары ауыстырымдылы, бұдан (7)-нің сол жағындығы туынды классикалық мағынаға ие болады.

Дәлелдеу.

$$\varphi_h(x) = \int_\Omega \omega_h(x-y) \varphi(y) dy \quad \Rightarrow \quad D^\alpha \varphi_n(x) = \int_\Omega D^\alpha \omega_h(x-y) \varphi(y) dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (-1)^\alpha \int_\Omega D_y^\alpha \varphi(y) \omega_h(x-y) dy = [D^\alpha \varphi]_h$$

Ω-да $dist(x, \partial\Omega) > h$ үшін, $\omega_h(x-y)$ функциясы туындыларымен қоса финиттік, $\partial\Omega$-да интегралдар жоқ болады. Теорема дәлелденді.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ және $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі функцияларының шекаралық қасиеттері. Бөліктеп интегралдау формуласы.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ және $W_2^1(\Omega)$ кеңістіктерін енгіземіз. Әдетте, бұл кеңістіктерде екінші ретті эллиптикалық теңдеулер,дербес жағдайда Лаплас, Пуассон теңдеулері үшін шекаралық есептер шығарылады.

Бұл жерде жалпылама шешімді қандай мағынада түсінуіміз керек? Басқаша айтқанда, $u(x) \in W_2^1(x)$ $n-1$ өлшемді кеңістік элементтерінің ізін анықтауымыз қажет. Алдымен, R^n гипержазықтығында шекаралық көпбейнелік болатын, одан соң R^n кеңістігінде $n-1$ өлшемді тегіс көпбейнелік туындысы болатын жағдайларды қарастырайық.

Теорема 1 Ω кеңістігі $R_+^n = \{x \in R^n : x' = (x_1,...,x_{n-1}) \in R^{n-1},\ x_n > 0\}$ ішкі кеңістігі болсын.

Онда кез келген $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы келесі қасиеттерге ие:

$u(x)$ функциясы барлық дерлік R_+^n кеңістігінде $x' = (x_1,...,x_{n-1})$ бойынша $u'(x) \in L_2(R^{n-1})$ квадратында интегралданатын $u'(x_1,...,x_n)$ функциясымен беттеседі. Барлық $x_n > 0$ үшін, келесі бағалау орынды:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u'(x_1,...,x_{n-1},x_n)|^2 dx_1,...,dx_{n-1} \le x_n \iint_{R_+^n} \left|\frac{\partial u'}{\partial x_n}\right| dx_1,...,dx_n \le x_n \| u' \|^2_{W_2^1(R_+^2)} =$$

$$= x_n \iint_{R_+^n} \left[u'^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u'}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx. \qquad (1)$$

яғни,

$$\| u'(x', x_n) \|_{L_2(R_{x'}^{n-1})} \le \sqrt{x_n}\ \| u' \|_{W_2^1(R_+^2)}.$$

Ескерту 1 $u(x)$, $u'(x)$ – функцияларының айырмашылығы, нөл өлшемді жиында $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (және $W_2^1(\Omega)$) кеңістігінің элементтері ретінде беттеседі. Мұндай функциялар эквивалентті деп аталады.

Бұдан ары оларды $u(x)$ арқылы белгілейміз.

Ескерту2.(1)-формуладан:

$$\int_{R_{x'}^{n-1}} |u'(x', x_n)|^2\ dx' \to 0\ \ x_n \to 0 \qquad (2)$$

яғни, $x_n \to 0$ жағдайда $u'(x', x_n)$ функциясы орта квадратта нөлге ұмтылады.

(1)-теоремадан кез келген $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясы $L_2(\Gamma)$ элементі ретінде, $\Gamma = \{x_n = const\}$ гипер жазықтығында ізі бар болады. Бұл функцияның ізі $L_2(\Gamma)$ кеңістігі нормасында $x_n \in [0,\delta]$ үздіксіз тәуелді

$$\sup_{x_n \in [0,\delta]} \| u'(x', x_n) \|_{L_2(\Gamma)} \to 0\ \ x_n \to 0.$$

Теорема 1 Қарапайым түрде $n = 2$ болған жағдайын қарастырайық. Айталық, $v(x_1, x_2) \in C_0$ болсын, онда Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша

$$v(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \frac{\partial v(y_1, y)}{\partial y} dy = \int_0^{x_2} \frac{\partial v(x_1, y)}{\partial y} dy$$

$\forall x_2 > 0$, Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ

$$|v(x_1,x_2)|^2 \le \int_0^{x_2} 1^2\,dy \cdot \int_0^{x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy = x_2\int_0^{x_2}\left|\frac{\partial v(x_1,y)}{\partial y}\right|^2 dy.$$

Екі жағында x_1 бойынша интегралдасақ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|v(x_1,x_2)|^2\,dx_1 \le x_2\iint_{R^2}\left|\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|^2 dx_2dx_1 \le x_2\,\|v\|^2_{W_2^1(R_+^2)},\ \forall x_2>0. \qquad (3)$$

$u(x_1,x_2)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ болсын және $W_2^1(R_+^2)$ нормасында $v_n(x_1,x_2)\to u(x_1,x_2)$ жинақталатын $v_n(x_1,x_2)\in C_0^\infty(R_+^2)$ тізбегі бар болады. (3)-формулаға $v=v_m-v_n$ қойып, мынаны аламыз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|v_m(x_1,x_2)-v_n(x_1,x_2)|^2\,dx_1 \le x_2\,\|v_m-v_n\|^2_{W_2^1(R_+^2)}\to 0,\quad m,n\to\infty,\ \forall x_2>0. \qquad (4)$$

Демек, $L_2(-\infty<x_1<+\infty)$ кеңістігінде кез келген бекітілген $x_2>0$ үшін, $v_n(x_1,x_2)$ функциясы фундаменталь тізбек құрайды. L_2-нің толықтығынан $u'(x_1,x_2)\in L_2(-\infty<x_1<+\infty)$ функциясы табылады, мына шартты қанағаттандыратын:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u'(x_1,x_2)-v_n(x_1,x_2)\right|^2 dx_1\to 0,\quad n\to\infty,\ \forall x_2>0.$$

$u'(x_1,x_2)$ функциясы барлық дерлік R_+^2-те $u(x_1,x_2)$ функциясымен беттесетінін дәлелдейік. (4)-формуладан $m\to\infty$ шекке көшеміз. $W_2^1(R_+^2)$ кеңістікте $\{v_m\}\to u(x)$ болады, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u'(x_1,x_2)-v_n(x_1,x_2)\right|^2 dx_1 \le x_2\,\|u-v_n\|^2_{W_2^1(R_+^2)}\ . \qquad (5)$$

(5)-ті x_2 бойынша 0-ден A-ға дейін интегралдаймыз, мұнда $\forall A:\ 0<A<\infty$

$$\int_0^A\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u'(x_1,x_2)-v_n(x_1,x_2)\right|^2 dx_1\right)dx_2 \le \frac{A^2}{2}\,\|u-v_n\|^2_{W_2^1(R_+^2)}\to 0,\quad n\to\infty.$$

$W_2^1(R_+^2)$ нормасында $\{v_n\}\to u$ $n\to\infty$ болса, онда $L_2(R_+^2)$ кеңістікте $v_n(x_1,x_2)$ тізбек $u(x_1,x_2)$-ке жинақталады, демек, $L_2(-\infty<x_1<+\infty,\ 0<x_2<A)$ де жинақталады. Бұл жерден және (6)-формуладан, барлық дерлік $(-\infty<x_1<+\infty,\ 0<x_2<A)$ жолағында $u'(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)$ келіп шығады, демек, бұл R_+^2 үшін де орындалады. Бұдан, $u(x_1,x_2)$ функциясы $u'(x_1,x_2)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясымен осы кеңістіктің элементі ретінде беттеседі. (3)-теңміздікте $v(x)$ функциясының орнына $v_n(x)$ қоямыз,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|v_n(x_1,x_2)|^2\,dx_1 \le x_2\iint_{R^2}\left|\frac{\partial v_n(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|^2 dx_2dx_1$$

егер $n\to\infty$ болғанда шекке көшсек (1)-теңсіздікті аламыз.

Енді, шекарасы $\partial\Omega$ C^1 регуляр классында(яғни, C^1 кеңістігінде жататын, шекарада локаль координата беретін функция) шектелген $\Omega\subset R^n$ облысын қарастырайық.

Мынадай функциялар берілсін:

$$x=\varphi(y)\quad \begin{Bmatrix} x_1=\varphi_1(y_1,y_2)\\ x_2=\varphi_2(y_1,y_2)\end{Bmatrix}\quad \varphi_i\in C^1(\overline{\Omega_1});$$

$$y=\psi(x)\quad \begin{Bmatrix} x_1=\psi_1(x_1,x_2)\\ x_2=\psi_2(x_1,x_2)\end{Bmatrix}\quad \psi_i\in C^1(\overline{\Omega})$$

$y_2 > 0$ жарты жазықтығы және $a \le y_1 \le t$ кесіндісі бойында Oy_1 осімен жанаса орналасқан, Ω -ны $\Omega_1 \subset R^2(y_1, y_2)$ облысына өзара бірмәнді үздіксіз бейнелеуді жүзеге асыру қажет. $A = \varphi(a,0)$, $B = \varphi(b,0)$ болсын, $y = \psi(x)$ бейнелеуі болған жағдайда $\breve{AB} \subset \partial\Omega$ шекара бөлігі $[a,b] \subset \partial\Omega_1$ кесіндісіне көшеді.

Ω -дан тысқары нөлмен жалғастыруға болатын $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясын қарастырайық. Жалғастыратын функцияны тағы $v(x)$ арқылы белгілейміз. $v(x) \in C_0^\infty(R^2)$ болатыны айқын.

Сол сияқты Ω -дан тысқары нөлмен жалғастыруға болатын $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясын қарастырайық. Бұл жалғастыруды да $u(x)$ арқылы белгілейміз. Бұдан мынаны аламыз: егер $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде $n \to \infty$ болғанда $v_n(x) \to u(x)$ болса, онда $\overset{0}{W}{}_2^1(R^2)$ -де жалжалғастырудан соң $v_n(x) \to u$ болдаы. $\Gamma_\varepsilon = (\breve{A}_\varepsilon, B_\varepsilon)$ арқылы $y = \psi(x)$: $\Omega \to \Omega_1$ бейнелеуі, Ω -да $\{y_2 = \varepsilon\} \cap \Omega_1$ кесіндісінің түпбейнесін белгілейміз. Бұл жерден:

Теорема 2 1) $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$;

2) Якоби матрицасының элементтерін

$$\frac{D[\varphi(y_1, y_2)]}{D(y_1, y_2)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$\overline{\Omega}_1$ -де үзіліссіз және барлық $\overline{\Omega}_1$ -де, бұл матрицаның анықтауышы нөлге тең емес, яғни, $\psi : x \to \varepsilon$ түрлендіруі өзгешеленбеген. Онда барлық дерлік Ω -да $u(x)$ функциясы $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ кеңістігіне тиісті болған, $\forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, сондай $u'(x)$ функциясымен беттеседі. Бұл жерде

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} | u'(x_1, x_2) |^2 \, d\Gamma_\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{6}$$

Егер(6)-формула орындалса, онда $u'(x)$ орта функциясы $\breve{AB}$ доғасында нөлге айналады.

Дәлелдеу. $u(x) \in W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ және $v_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ мен $v_n(x) \in C_0^\infty(\overline{\Omega}_1)$ болсын, $\overset{0}{W}{}_2^1(R^2)$ -да $v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$, одан соң оны Ω -дан тысқары нөлмен жалғастырамыз және мынаны аламыз:

$$\overset{0}{W}{}_2^1(R^2)\text{-де } v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$$

$$\tilde{v}_n(y_1, y_2) = v_n(\varphi_1(y_1, y_2)), \ \ \varphi_2(y_1, y_2),$$

$$\tilde{u}(y_1, y_2) = u(\varphi_1(y_1, y_2)), \ \ \varphi_2(y_1, y_2),$$

Онда үзіліссіз бейнелеуден $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$ -де:

$$\tilde{v}_n(y_1 y_2) \to \tilde{u}(y_1 y_2)$$

Шынында да, егер тізбек $L_2(\Omega)$-де $v_n(x) \to u(x)$ болса, онда $L_2(\Omega_1)$ -де

$$\tilde{v}_n(y) \to \tilde{u}(y)$$

$$\int_{\Omega_1} \left| \tilde{v}_n(y) - \tilde{u}(y) \right|^2 dy_1 dy_2 = \int_{\Omega} \left| v_n(x) - u(x) \right| \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx_1 dx_2 \le C \int_{\Omega} \left| v_n(x) - u(x) \right|^2 dx_1 dy_2 \to 0$$

$n \to 0$ болған жағдайда.

Дәл сол сияқты талқылауды туындылар үшін келтірейік:

Егер $L_2(\Omega_1)$ -де $\frac{\partial v_n^{(x)}}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$, онда $L_2(\Omega_1)$ – де $\frac{\partial \tilde{v}_n(y)}{\partial y_i} \to \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_i}$ i=1, 2,...

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial y_i}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_i}\right|^2 dy_1dy_2=\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}+\frac{\partial v_n\partial\varphi_2}{\partial x_2\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}\right|^2\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx_1dx_2\le$$

$$\le C\int_{\Omega}\left\{\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}\right|^2+\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}\right|^2\right\}dx_1dx_2\le$$

$$\le C_1\int_{\Omega}\left\{\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_2}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right\}dx_1dx_2\to 0,\ n\to\infty.$$

R_+^2 жарты жазықтығында $\tilde{v}_n(y)$ және $\tilde{u}(y)$ функцияларын Ω_1 тысқары нөлмен жалғастырамыз. Онда теорема 1 бойынша $\tilde{u}(y)$ функциясы $\tilde{u}'(y)$ функциясымен барлық дерлік R_+^2-те беттеседі,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{u}'(y_1y_2)\right|^2 dy_1\le y_2\iint_{R_+^2}\left|\frac{\partial\tilde{u}'(y)}{\partial y_2}\right|^2 dy_1dy_2\le y_2\,\|\tilde{u}'\|^2_{W_2^1(R_+^2)},\quad\forall y_2>0.$$

Сондықтан $\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{u}'(y)|^2\,dy_1=\int_{\grave{a}_{\acute{A}}}^{\hat{a}_{\text{Е}}}|\tilde{u}'(y_1y_2)|\,dy_1\to 0\quad y_2\to 0$

$u'(x_1x_2)=\tilde{u}'(\psi_1(x_1x_2),\ \psi_2(x_1x_2))$ арқылы белгілейміз. $u'(x_1x_2)$ функциясы $u(x_1x_2)$ функциясымен беттесетіні айқын, сонымен

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}|u'(x_1x_2)|\,d\Gamma_\varepsilon=\int_{\grave{a}_\varepsilon}^{\hat{a}_\varepsilon}|\tilde{u}'(y_1y_2)|^2\left|\frac{d\Gamma_\varepsilon}{dy_1}\right|dy_1\le C\int_{\grave{a}_\varepsilon}^{\hat{a}_\varepsilon}|\tilde{u}'(y_1y_2)|^2\,dy_1\to 0,\quad\varepsilon\to 0\tag{7}$$

Сонымен біз $u(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ орта функциясын $\partial\Omega$ нөлге айналдыратынын дәлелдедік, яғни

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}|u'(x_1x_2)|\,d\Gamma_\varepsilon\to 0,\ \varepsilon\to 0$$

$\partial\Omega$ шекарасының бөлігін $\partial\Omega=\bigcup_{k=1}^{m}\breve{A}_kB_k$ түрде алуға болады. n- өлшемді жағдай үшін де осы келтірілген дәлелдеу орынды. $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі үшін келесі теорема орынды:

Теорема 3 $\partial\Omega$ бөлікті-тегіс кеңістік, онда $L_2(\partial\Omega)$-ның элеметтері ретінде $\partial\Omega$-да $u(x)\in W_2^1(\Omega)$ элементтері үшін іздер анықталады.

Теорема 3 Соболев кеңістігіндегі енгізу теоремаларының қарапайымдарының бірі және оны келесі түрде өрнектеуге болады:

Егер $\partial\Omega$-бөлікті-тегіс шекара, онда $L_2(\partial\Omega)$-да $W_2^1(\Omega)$ шектеледі, онда мына бағалауды аламыз:

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}\le C\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\,.\tag{8}$$

Теорема 2 бойынша ($\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде қарастыратын болсақ), Ω облысының $\partial\Omega$ шекарасында тегістік шартын алмасақта болатынын байқаймыз. Бұл деген кез келген $u(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциясын Ω -дан тысқары, $\overset{0}{W}{}_2^1(B)$ элементі ретінде нөлмен жалғастыруға болады. Мұнда $B\ \overline{\Omega}$ -мен тұйықтауы.

Соболев енгізу теоремасының мәнісі кеңістіктерді арнаулы ретпен құрудан тұрады, яғни бір кеңістік бүтіндей басқа кеңістікке еніп кететіндей етеді, бұл енгізу әртүрлі кеңістіктердің элементтерін қарастырғанда біреуінің не сол функцияның өзінің нормаларының арасындағы теңсіздіктермен алып жүреді.

Бөліктеп интегралдау формуласы. 2-3-теоремалардан, $u(x)\in W_2^1(\Omega)$ элементтері үшін мына бөліктеп интегралдау формуласы орынды:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}v(x)dx=-\int_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_{\partial\Omega}uv\cos(\vec{n}\,x_i)ds\tag{9}$$

$\vec{n}$ - сыртқы бірлік нормал $\partial\Omega$-да, Ω-ға қатысты. (9)-формула $u(x), v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялары және $\partial\Omega$ тегіс беттері үшін анализден белгілі. 3 теоремадан $W_2^1(\Omega)$ элементтерінің ізі қасиетінен, $\forall i = 1,2,...,n$ болғанда $u(x), v(x) \in W_2^1(\Omega)$ функциялары үшін, егер $\partial\Omega$-тегіс бет болса, (9)-формула сақталады. Бұны тексеру үшін, $\{u_n\}, \{v_n\}$ тегіс элементтерімен $u(x)$ және $v(x)$ аппроксимациялау қажет, (9)-формуланы жазамыз. Бұдан соң шекке көшеміз.

(2)-теореманың көмегімен $u(x), v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ элементтері үшін (9)-формула қарапайым түрге келеді:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad \forall i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Кеңейтіңкіреген класс сақтау облысымен Соболев кеңістігінде функцияларды жалғастырудың негізгі ұғымдары.

Басқа лекцияларда байқағанымыздай, $W_p^l(\Omega)$ кеңістігінде шекаралық есептерді шешуде, кейде берілген Ω-да функцияларды жалғастыруға тура келеді, $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$ үлкен облыста жалғастырылған функциялар $W_p^l(\tilde{\Omega})$-ның ($1 \le p < \infty$) элементтері болатындай және мына теңсіздік орындалатындай:

$$\| u \|_{W_p^l(\tilde{\Omega})} \le C(p, l, \Omega, \tilde{\Omega}) \| u \|_{W_p^l \Omega} \tag{1}$$

C - тұрақтысы $u(x)$-тен тәуелсіз. Жалғастырылған функцияларға алдыңғы белгілеулер қалады. Келесі теорема облыстың шекарасы Липшицтік болғанда ғана дұрыс болады.

Теорема $\partial\Omega \in Lip1$, $l \in N$, $1 \le p < \infty$ болсын. Онда кез келген $u(x) \in W_p^l(\Omega)$-ке $U(x) \in W_p^l(R^n)$, $U(x) = u(x)$ жалғастыруы табылады, бұдан

$$\| U \|_{W_p^l(R^n)} \le C \| u \|_{W_p^l \Omega}$$

C - тұрақтысы $u(x)$-тен тәуелсіз.

Егер $u(x) \in \overset{0}{W}{}_p^l(\Omega)$ болса, онда оны нөлмен жалғастырсақ, $\forall \tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$-да $u(x) \in \overset{0}{W}{}_p^l(\tilde{\Omega})$ функциясын аламыз. Сақталу классымен жалғастырылатын функцияларға кең көлемді әдебиеттер арналған (Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.И. Интегральные представления и теорема вложения М., Наука. 1975)(Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференцирования свойства функций. –М. Мир, 1973).

Пуанкаре теңсіздігі. $\overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ - дағы функция ізі

Соболев туындыларын анықтау негізінде Лебег интегралы жатыр, сондықтан барлық дерлік жерде функциялар беттесетін (яғни нөл өлшемді жиындарда ерекшеленетін), $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ кеңістіктердің әрқайсысының бір элементі беріледі. Сәйкесінше, $u(x)$ функциясының өзгеруі, қандай да бір R гипержазықтықтағы (гипержазықтық көлемдік кеңістікте нөлдік өлшемге ие) Ω немесе $\overline{\Omega}$ –дінбейнеленуі ретінде, бұл функцияны «функционалдық кеңістік элементі» ретінде өзгермейді. Бұдан «гипербеттегі $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $\overset{0}{H}{}_0^1(\Omega)$ кеңістіктердегі функциялардың мәндері» деген түсініктің мәні болмайды.

Сонда да бұл түсінікке әбден айқын мағына беруге болады екен, ал $H^1(\Omega)$ немесе $\overset{0}{H}{}_0^1(\Omega)$ (тек $L^2(\Omega)$ емес) кеңістіктерінің жағдайында қарапайым функциялардың (жалпыланған емес) класстарынан шықпайды.

Қарапайымдылық үшін кішірек $H_0^1(\Omega)$ кеңістікпен шектелейік. Анықтама бойынша, $C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$ кеңістігі $H_0^1(\Omega)$–де барлық жерінде тығыз, яғни $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$. Біз

$u \in D(\Omega)$ функцияларын барлық R^n берілген деп аламыз, оларды Ω –дан тыс нөлмен анықтаймыз. Кез-келген $u(x) \in C_0^\infty(R^{n-1})$ функциясы $C_0^\infty(R^{n-1})$ кеңістігінің элементі болатын $x_j = const$ гипержазықтықта $\gamma(u)$ ізі анықталған. Сол арқылы, бейнелеуі алынады:

$$\gamma : C_0^\infty(R^n) \to C_0^\infty(R^{n-1})$$

Бұл γ бейнелеуі $L^2(\Omega)$- де $H^1(\Omega)$-ден үздіксіз жалғасатынын көрсетейік, мұнда $\Omega^{'}$ деп Ω -мен $x_j = const$ гипержазықтық қиылысы: $\Omega^{'} = \Omega \cap \{x_j = const\}$.

Теорема 1 Егер $u_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы $H_0^1(\Omega)$ нормасы бойынша фундаменталь болса, онда ол $x_j = const$ гипержазықтықта $L^2(\Omega^{'})$ нормасы бойынша фундаменталь болады.

Дәлелдеу Айталық, анықтық үшін $i = 1,\ \ x_1 = const = x_0^1$ дейік. $\Omega = \{x : |x_j| \le A,\ \ i = 1,..., n\}$ болсын. Алдыңғыдай, Ω -дан тысқары $u = 0$ десек,

$$u(x_1^0, x_2,..., x_n) = \int_{-A}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1$$

Коши-Буняковский теңсіздігінен,

$$u^2(x_1^0, x_2,..., x_n) = \left(\int_{-A}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \right)^2 \le 2A \int_{-A}^{A} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 ,$$

$x_1 = x_1^0$ бойынша интегралдаймыз:

$$\int_{(x_1 = x_1^0) \cap \Omega} u(x_1^0, x_2,..., x_n) dx_2 dx_3 ... dx_n \le 2A \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx = 2A \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{2,\Omega}^2 \le 2A \| u \|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

Бұд теңсіздікті $u = u_m - u_k$ үшін жазайық:

$$\| u_m - u_k \|_{L_2(\Omega^{'})} = \int_{\Omega^{'}} (u_m - u_k)^2 dx_2 ... dx_n \le 2A \| u_m - u_k \|_{H_0^1(\Omega)} \qquad (1)$$

яғни, $u_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясының u_n тізбегі $H_0^1(\Omega)$ номасында жинақталады, $n \to \infty$ болған жағдайда $x_j = const$ гипержазықтықта $L^2(\Omega^{'})$ нормасы бойынша жинақталады.

§ Эллиптикалық теңдеу үшін спектральдық есеп. Дирихле, Нейман және үшінші шекаралық есептің жалпыланған меншікті функциялары. Өзіне өзі түйіндес компакт оператордың операторлық теңдеуі.

Спектральдық есеп үшін келесі эллиптикалық теңдеуді

$$-div(p(x)\nabla\vartheta(x))+q(x)\vartheta(x)=\lambda\vartheta(x),\quad x\in\Omega\subset R^n \tag{1}$$

$$\vartheta\big|_{\Gamma=\partial\Omega}=0 \tag{2}$$

немесе

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\vec{n}}+\sigma(x)\vartheta(x)\Big|_{\Gamma=\partial\Omega}=0 \tag{3}$$

шекаралық шартымен қарастырамыз, мұндағы барлық коэффициенттер $p(x),q(x),\sigma(x)-$ жеткілікті жатық функциялар, нақтырақ айтқанда: $p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ q(x)\in C(\overline{\Omega}),\ \sigma(x)\in C(\partial\Omega);\quad \sigma(x)\succ 0,\ p(x)\geq p_0\succ 0,\ q(x)\geq 0$. $\frac{\partial}{\partial\vec{n}}-Q$ цилиндрінің $\sum-$бүйір бетіне қарай $\vec{n}$ ішкі нормалінің бағыты бойынша алынған туындыны білдіреді. Айталық $\partial\Omega-$ бөлікті жатық бет болсын.

Бізге тек $(1),(2)$ және $(1),(3)$ есептері тривиал емес шешімге ие болатын λ мәндерін табу керек, яғни $\|\vartheta\|\neq 0$.

Осындай λ мәндері меншікті мәндер деп аталады, ал сәйкес тривиал емес $(1),(2)$ немесе $(1),(3)$ есептерінің шешімдері меншікті функциялар деп аталады. Бір ғана λ мәніне сәйкес келетін сызықты тәуелсіз меншікті функциялардың саны меншікті мәннің еселігі деп аталады.

Егер $\vartheta(x)-$меншікті функция болса, онда есептің сызықтылығы мен біртектілігіне орай $C\vartheta(x)$ функциясы кез – келген $C\neq 0$ үшін меншікті функция болады.

Сол себепті біз $L_2(\Omega)-$да нормаланған $\|\vartheta\|_{2,\Omega}=1$ шартын қанағаттандыратын меншікті функцияларды қарастырамыз.

Меншікті мәнге жалпылама түрде қойылған есепті қарастырамыз, яғни $(1),(2)$ есебін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде, ал $(1),(3)$ есебін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде қарастырамыз.

Анықтама 1. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\,\overline{\Phi}$ үшін мына интегралдық тепетеңдік

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx=\lambda\int_\Omega\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dx, \tag{4}$$

орынды болатындай λ табылып, оған сәйкес нөлге тепе – тең емес $(\vartheta(x)\neq 0)$ (1) ,(2) теңдеудің жалпылама шешімін осы есептің, яғни Дирихле есебінің жалпылама меншікті функциясы деп атаймыз.

2-ші және 3-ші шекаралық есептер үшін:

Анықтама 2. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\,\overline{\Phi}$ үшін мына интегралдық тепетеңдік

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx+\int_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dS=\lambda\int_\Omega\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dx, \tag{5}$$

орындалатындай λ табылып, оған сәйкесті тривиал емес $\vartheta(x)\neq 0$ табылған $\vartheta(x)$ жалпылама шешімін $\sigma(x)\equiv 0$ жағдайда екінші шекаралық есептің жалпылама меншікті функциясы деп, немесе $\sigma(x)\not\equiv 0$ жағдайында үшінші шекаралық есептің жалпылама меншікті функциясы деп атаймыз.

Біз осыған дейін нақты мәнді функциялар қарастырып келдік және $L^2(\Omega)$-дегі скалярлық көбейтіндіні $(f,\Phi)=\int_\Omega f(x)\Phi(x)dx$ қолдандық, енді функциялар комплекс мәнді болуы мүмкін деп, сәйкесті $L^2(\Omega)$-дегі скалярлық көбейтіндіні $(f,\overline{\Phi})=\int\limits_{\Omega} f(x)\overline{\Phi}(x)dx$ түрінде аламыз.

Бұдан ары қарай, жалпылама меншікті функцияларды табу үшін, (4),(5) интегралдық тепетеңдіктерді пайдаланамыз. Сондықтан, (4),(5) –тің сол жақтары сәйкесті гильберттік кеңістіктеріндегі скалярлық көбейтіндіні туындатқаны қажет.

(4) теңдіктің сол жағы

$$\{\vartheta,\overline{\Phi}\}:=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{n} p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx \tag{6}$$

біздің коэффициенттерге қойған шарттарымыз бойынша $p(x)\geq p_0\succ 0, q(x)\geq 0$ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-дегі скалярлық көбейтіндіні туындататынын анық байқауға болады, себебі ол Фридрихс теңсіздігінен және $(\vartheta,\vartheta)=0$ теңдігінен $\vartheta(x)\equiv 0$ шығады.

Тап осылай (5)-ші теңдік үшін де орындалады, Егер $W_2^1(\Omega)\ni\vartheta(x),\Phi(x)$ үшін $q(x)$ және $\sigma(x)$ бір мезетте нөлге тең болмаған жағдайда, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\,\overline{\Phi}$ үшін

$$\{\vartheta,\Phi\}^{\sigma}:=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{n} p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx+\int\limits_{\partial\Omega} p(x)\sigma(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dS\,. \tag{7}$$

$q(x)=\sigma(x)=0$ жағдайында (7) теңдік скалярлық көбейтінді бола алмайды, себебі $\{\vartheta,\vartheta\}^{\sigma}=0$ көбейтіндісінен $\vartheta=const$ шығады, яғни скалярлық көбейтіндісінің $\vartheta=0$ шарты орындалмайды.

Нейман есебі үшін жалпылама шешімді анықтаудағы интегралдық тепетеңдіктің сол жағы скалярлық көбейтіндіні туындатуы үшін, (1) теңдеудің орнына қойған эквивалентті келесі теңдеуді қарастырамыз (бұл барлық үш шекаралық есепке бірдей болсын деп қалдырамыз).

$$-div(p(x)\nabla\vartheta(x))+\tilde{q}(x)\vartheta(x)=(\lambda+1)\vartheta(x),\quad x\in\Omega\subset R^n \tag{8}$$

мұндағы $\tilde{q}(x)=q(x)+1\geq 1$ және (8) теңдеуге сәйкесті (4) және (5) интегралдық тепетеңдіктер үшін ізделінді меншікті мәндер 1 санына жылжиды.

Дирихле есебін, (8) және (2) есепті қарастырамыз. Келесі түрдегі скаляр көбейтіндіні енгіземіз:

$$\{\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\left[p(x)\nabla\vartheta\nabla\overline{\Phi}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx \tag{9}$$

Онда (4) интегралдық тепетеңдігі келесі түрге келеді:

$$\{\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(\lambda+1)(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega} \tag{10}$$

мұндағы $(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}=(\vartheta,\Phi)_{L_2(\Omega)}$ $L_2(\Omega)$– дегі қарапайым скалярлық көбейтінді.

Рисс теоремасын пайдаланып, келесі теореманы дәлелдейік.

Теорема 1. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде жататын кез келген $\Phi(x)$ үшін

$$(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}=(A\vartheta,\Phi)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \tag{11}$$

теңдігі орынды болатындай сызықты шенелген $A:L_2(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ операторы табылады.

(ii) A операторының A^{-1} кері операторы бар.

(iii) Егер A операторын $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$– ны $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$– ға бейнелейді деп қарастырсақ, онда ол өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт болады.

Дәлелдеу. *(i)* Гильберт кеңістігіндегі сызықты, үзіліссіз функционалдың жалпы түрі туралы Рисс теоремасын пайдаланамыз. Айталық, $L_2(\Omega)\ni\vartheta(x)$ бекітілген функция болсын. Φ бойынша сызықты, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\Phi(x)$ функциясына әсер ететін $l_{\vartheta}=l(\Phi)=(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}$ функционалын қарастырайық. Ол шенелген, себебі Фридрихс теңсіздігі пайдалана отырып, мына бағалауды аламыз

$$\left|l_\sigma(\Phi)\right| = \left|(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}\right| \le \|\vartheta\|_{2,\Omega}\cdot\|\Phi\|_{2,\Omega} \le C\|\vartheta\|_{2,\Omega}\cdot\|\Phi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Сол себепті Рисс теоремасы бойынша $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \ni \Phi(x)$ үшін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-де жататын жалғыз $\omega(x)$ функциясы табылып

$$l(\Phi) = (\vartheta,\Phi)_{2,\Omega} = \{\omega(x),\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \qquad \forall\Phi(x)\in H_0^1(\Omega)$$

теңдігі орынды болады, сонымен қатар

$$\|\omega(x)\|_{H_0^1(\Omega)} = |l(\Phi)| \le C\|\vartheta\|_{2,\Omega} \tag{12}$$

бағалауын аламыз.

Яғни A сызықты операторы біздің жағдайымызда, барлық $L_2(\Omega)$ элементтері үшін анықталады:

$A: L_2(\Omega)\to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $A\vartheta=\omega$, және A үшін (11) теңдігі орынды. (11) және (12) теңдіктерінен

$$\|A\vartheta\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C\|\vartheta\|_{2,\Omega}.$$

теңсіздігі орынды, яғни A операторы $L_2(\Omega)$-ден $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ға бейнелеу операторы ретінде шенелген болып шықты.

(ii) A операторы A^{-1} кері операторы бар.

A^{-1} операторы:әртүрлі екі нүктеде әртүрлі мән қабылдайтын сызықтық A операторы үшін анықталады. Егер осы шарт орындалса, онда анықтама бойынша $A\vartheta=\omega$ жағдайында, $A^{-1}\omega=\vartheta$.

Берілген A операторының мәндер аймағы кері A^{-1} операторының анықталу аймағы болып табылады. A^{-1} кері операторының бар болуының жеткілікті де қажетті шарты болып, $\ker A=0$ ядросының тривиалдығы саналады, яғни $Au=0$ жалғыз $u=0$ үшін. Біздің жағдайымызда A операторының өзегі тек нөлден ғана тұра ма екенін тексерейік.

Шынымен де, егер бекітілген $L_2(\Omega)\ni\vartheta$ үшін $A\vartheta=0$ болсын, онда (11) теңдік бойынша $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\Phi(x)$ үшін (ϑ,Φ) осыдан $\vartheta=0$ екендігі шығады. Осымен, A^{-1} кері операторының бар болуы дәлелденді.

(iii) Енді (11) A операторы $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ті $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ке бейнелейді десек, онда оның өзіне өзі түйіндес болатынын дәлелдейік. Егер A операторы $L_2(\Omega)$ кеңістігінде анықталып және шенелген болса, онда ол $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\in L_2(\Omega)$ кеңістігіндеде анықталған және шенелген болады, себебі $\overset{0}{W}{}_2^1\subset L^2(\Omega)$. Сондықтан, оның симметриялы екенін ғана тексеру жеткілікті. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$- дегі барлық ϑ мен Φ үшін

$$\{A\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\vartheta,\Phi)_{2,\Omega} = \overline{(\Phi,\vartheta)}_{2,\Omega} = \overline{\{A\Phi,\vartheta\}}_{\overset{0}{W}{}_2^1} = \{\vartheta,A\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \quad \text{шығады.}$$

Функционалдық талдау курсынан еске түсірейік, A операторы оң анықталған деп аталады, егер одан туындалған шаршы тұлға тек теріс емес мәндер қабылдаса, яғни $(A\vartheta,\vartheta)\ge 0 \quad \forall\vartheta\in D(A)$.

Осыдан аламыз $\{A\vartheta,\vartheta\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\vartheta,\vartheta)\ge 0$, яғни A операторы оң анықталған.

Енді $A:\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ компакт екенін көрсетейік. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде кез келген шенелген жиынды қарастырайық. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ компакт енгізу теоремасына сәйкес, бұл функциялар жиыны $L_2(\Omega)$ кеңістігінде компакт болады. Демек, кез келген ақырсыз ішкі кеңістіктерінен $L_2(\Omega)$ кеңістігінде іргелі болатын $\{\vartheta_{k_s}\}$ тізбекшесін таңдап алуға болады. Бірақ A операторы сызықты және шенелген. Осыдан, $k_s\to\infty$

$$\left\| A\vartheta_{k_s} - A\vartheta \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = \left\| A(\vartheta_{k_s} - \vartheta) \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C \left\| \vartheta_{k_s} - \vartheta \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0.$$

Ал $s, n \succ N$ үшін

$$\left\| A\vartheta_{k_s} - A\vartheta_{k_n} \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = \left\| A(\vartheta_{k_s} - \vartheta_{k_n}) \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C \left\| \vartheta_{k_s} - \vartheta_{k_n} \right\|_{L_2(\Omega)} = C \left\| \vartheta_{k_s} - \vartheta \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0.$$

Бұдан, $\{A\vartheta_{k_s}\}$ тізбекшесі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде іргелі, яғни A $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде шенелген операторы осы кеңістіктің өзіне компакт болып көшіреді, демек $A-$ компакт оператор.

Меншікті мән туралы есепті зерттеуді жалғастырамыз.
Теорема 1 қолданып, (10) теңдікті келесі түрде жазамыз:

$$\{\vartheta, \Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda + 1)\{A\vartheta, \Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \quad \forall\, \Phi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{13}$$

Осыдан A компакт оператор болатын

$$\vartheta = (1+\lambda)A\vartheta, \quad \vartheta(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{14}$$

операторлық теңдеуді аламыз. (8) теңдеу (яғни (1) теңдеу) үшін меншікті мәнге Дирихле есебі компакт, теріс емес, өзіне-өзі түйіндес A операторының меншікті мән есебіне айналды. Дәл осылай, (3) (екінші және үшінші шекаралық есепті) шекаралық шарты бар есепті компакт, теріс емес, өзіне-өзі түйіндес A операторының меншікті мән есебіне келтіруге болады.

Теорема 2 Кез – келген $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ үшін

$$(\vartheta, \Phi)_{2,\Omega} = (\tilde{A}\vartheta, \Phi)_{W_2^1(\Omega)} \tag{15}$$

теңдігі орындалатындай сызықты шенелген $\tilde{A}: L_2(\Omega) \to W_2^1(\Omega)$ (анықталу облысы $L_2(\Omega)$) операторы табылады.

$\tilde{A}$ операторының $\tilde{A}^{-1}$ кері операторы бар.

Егер $\tilde{A}$ операторын $W_2^1(\Omega)-$ дан $W_2^1(\Omega)-$ ға қарастырсақ (яғни $D(A) = W_2^1(\Omega)$), онда өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт болады. Теорема 2 дәлелденуі Теорема 1 дәлелімен ұқсас дәлелденеді.

Ол үшін (8) теңдеумен туындалған ((5) сәйкес) келесі түрдегі скаляр көбейтінді енгіземіз

$$\{\vartheta, \Phi\}_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[p(x)\nabla\vartheta\nabla\overline{\Phi} + q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x) \right] dx + \int_{\partial\Omega} p(x)\sigma(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\, dS. \tag{16}$$

Осы скаляр көбейтіндіден туындалған (16) нормасы $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің нормасына эквивалент екенін оңай көрсетуге болады. Жоғарыда айтылған тұжырымдарды қайталай отырып, енді тек $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде (16) скаляр көбейтіндісімен және $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ енгізудің компактылығы туралы теореманы қолдана отырып, біз операторлық теңдеу үшін меншікті мән есебіне

$$\vartheta = (1+\lambda)\tilde{A}\vartheta, \quad \vartheta(x) \in W_2^1(\Omega) \tag{17}$$

келеміз, $\tilde{A}: W_2^1(\Omega) \to W_2^1(\Omega)$ өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт оператор.

Теорема 1 және Теорема 2 келесі тұжырымданды аламыз.

Тұжырым 1 λ саны анықталу облысы $D(A) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ болатын (1) теңдеудің өзіне қойылған эллиптикалық оператор үшін (2) D есебінің меншікті мәні, ал $\vartheta(x)-$ сәйкес жалпылама меншікті функция болады, сонда тек сонда ғана, егер $(\lambda+1)$ өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт A операторының сипаттауыш саны болса. $A: \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, ал $\vartheta(x)-$ осы санға сәйкес меншікті элемент.

Тұжырым 2 λ саны анықталу облысы $D(A) = W_2^1(\Omega)$ болатын (1) теңдеудің өзіне қойылған эллиптикалық оператор үшін (3) шектік есебінің меншікті мәні, ал $\vartheta(x)-$ сәйкес жалпылама меншікті функция болады, сонда тек сонда ғана, егер $(\lambda+1)$ өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт $\tilde{A}$ операторының сипаттауыш саны болса. $\tilde{A}: W_2^1(\Omega) \to W_2^1(\Omega)$, ал $\vartheta(x)-$ осы санға сәйкес меншікті элемент.

§ Эллиптикалық оператор үшін жалпылама меншікті функцияның және меншікті мәннің қасиеттері

Гильберт кеңістігіндегі сызықтық, өзіне – өзі түйіндес, компакт операторлардың теориясынан белгілі.

1) (2) есептің ((3) есептің) саналымды жиыннан артық емес меншікті функциялары бар болады.

2) Бұл жиынның ақырлы шектік нүктесі болмайды.

3) Барлық меншікті мәндер нақты.

4) Әрбір меншікті санға H кеңістігінде ((2) есепте $\mathrm{H}=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ және (3) есепте $\mathrm{H}=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) саны ақырлы өзара-ортонормаланған меншікті функциялар сәйкес келеді, яғни сызықты-тәуелсіз меншікті функциялардың ақырлы саны. Демек, әрбір меншікті мәннің ақырлы еселігі бар.

5) Әртүрлі меншікті санға сәйкес келетін H кеңістігіндегі ((2) есепте $\mathrm{H}=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ және (3) есепте $\mathrm{H}=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) меншікті функциялар ортогональ.

6) Меншікті функцияларды нақты етіп таңдап алуға болады. Бұл қасиет L операторы нақты коэффициенттер мен нақты меншікті мәндерге ие болатындығынан шығады. Шыныменде, айталық λ_0 – меншікті мән және ϑ_0 – сәйкес меншікті функция болсын $L\vartheta_0=\lambda_0\vartheta_0$. Соңғы теңдіктен нақты және жорамал бөлігін анықтай отырып, $\vartheta_0=\vartheta_1+i\vartheta_2$ деп, λ_0 меншікті мәніне сәйкес ϑ_1 және ϑ_2 меншікті функция болатынын аламыз: $L\vartheta_k=\lambda_k\vartheta_k,\quad k=1,2...$ (яғни меншікті мәнннің еселігі артады).

7) Сонымен теорема 1 және теорема 2 бойынша A және $\tilde{A}$ операторлары оң, онда (4),(5) интегралдық өрнегінен $\Phi\equiv\vartheta,\ \ \|\vartheta\|_{2,\Omega}=1$ болғанда (1),(2) және (1),(3) есептерінің барлық меншікті мәндері теріс емес болады. Шынымен, (4) теңдеуіне Φ функциясының орнына $\vartheta(x)$ меншікті функцияны қою арқылы D есебі үшін аламыз

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\right|^2+q(x)|\vartheta|^2\right]dx=\lambda\int_\Omega|\vartheta|^2dx\ge 0,$$

және (3) есеп үшін

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\right|^2+q(x)|\vartheta|^2\right]dx+\int_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)|\vartheta|^2dS=\lambda\|\vartheta\|_{2,\Omega}^2\ge 0.$$

(3) есеп үшін $D(L)=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ және D есебі үшін $D(L)=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ болатын (1) дифференциалдық өртекті L дифференциалдық операторымен белгілейміз. $\lambda=0$ саны L операторының меншікті мәні болғанда келесі теорема орынды.

Теорема 3 (3) есеп үшін $D(L)=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ және D есебі үшін $D(L)=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ облысында анықталған L операторлық теңдеудің $\lambda=0$ меншікті мәні болуы үшін, $q(x)\equiv 0,\quad \sigma(x)\equiv 0$ (яғни (1) теңдеу үшін Нейман есебін қарастырғанда $q(x)\equiv 0$) болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $\lambda=0$ жай (біреселі) меншікті мән және $\vartheta(x)=const$ -сәйкес меншікті функция.

Дәлелдеу (Қажеттілік "$\Rightarrow$") Айталық, $\lambda=0$ L операторының меншікті мәні, ал $\vartheta(x)=const\ne 0$ сәйкес меншікті функция.

Жалпылама функция анықтамасын (5) түрінде қарастырамыз және $\Phi(x)$ функциясы орнына $\vartheta(x)=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ (D есебінде $\Phi(x)$ орнына (4) формуласына $\vartheta(x)=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ қоямыз). Сонымен аламыз

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\right|^2+q(x)|\vartheta|^2\right]dx+\int_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)|\vartheta|^2dS=0,$$

осыдан $p(x)|\nabla\vartheta|=0,\ q\vartheta=0$ яғни $\vartheta(x)=const$ болады, тек $q(x)\equiv 0,\ x\in\Omega$. Ал шекаралық интегралдан $x\in\Omega$ үшін $\sigma(x)\equiv 0$ аламыз. $(\Rightarrow)$ дәлелденді.

Сонымен қатар, $\lambda = 0$ меншікті мәніне сәйкес $\vartheta(x) = const$ жалғыз меншікті функция, яғни $\lambda = 0$ бірeселі меншікті мән.

(Жеткіліктілік "$\Leftarrow$") Айталық $q(x) \equiv 0, \quad \sigma(x) \equiv 0$ болсын және (3) есепті қарастырайық. $\lambda = 0$ саны Дирихле есебінде $\vartheta(x) = 0$ меншікті функциясына сәйкес келеді, яғни $\lambda = 0$ меншікті мән болмайды. Онда $(1),(3)$ есебі келесі түрде болады

$$-div(p(x)\nabla\vartheta(x)) = \lambda\vartheta(x), \quad x \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Бұл есеп үшін (5) интегралдық өрнегін қолдана отырып, аламыз

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{n} p(x)\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\right|^2\right]dx = 0, \quad p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\vartheta}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \vartheta(x) \equiv const\,.$$

Жоғарыда айтылған $(1),(2)$ (D есебі) және $(1),(3)$ (N есебі) есептерінің жалпылама меншікті функцияларының қасиеттерін нақтылап зерттейміз.

Есептің барлық меншікті мәндерін шамасының өсуіне байланысты нөмірлеуге болады

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ...,$$

сонымен бірге λ_k еселігіне байланысты сонша рет қайталап жазамыз. Онда әрбір λ_k үшін тек бір ғана жалпылама меншікті функция сәйкес келеді

$$\vartheta_1(x), \vartheta_2(x),.., \vartheta_k(x),..., \tag{18}$$

сонымен қатар D есебі үшін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде және N есебі үшін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде $\vartheta_k(x)$ өзара ортогональ және $\|\vartheta_k\|_{2,\Omega} = 1$ болады.

Енді $\varphi(x) \in L_2(\Omega), \varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$ функцияларын Фурье қатарына жіктеу есебін қарастырамыз және осы кеңістіктердегі алынған қатарлардың жинақтылығын зерттейміз.

Сұрақ: Меншікті функция құрай ма және қандай жағдайда олар сәйкес кеңістіктердің базисы болады?

Жауап: Ия.

Бұл үшін (14) және (17) операторлық теңдеуге λ_k және $\vartheta_k(x)$ қойып қарастырамыз:

$$\vartheta_k = (1+\lambda_k)A\vartheta_k, \tag{19}$$

$$\vartheta_k = (1+\lambda_k)\tilde{A}\vartheta_k. \tag{20}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде (19) теңдеуін $\vartheta_k(x)$ функциясына скаляр көбейтіп және (11) пайдаланып:

$$\{\vartheta_k, \vartheta_k\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{A\vartheta_k, \vartheta_k\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)(\vartheta_k, \vartheta_k)_{2,\Omega} = (\lambda_k + 1). \tag{21}$$

$(21) \Rightarrow$

$$\frac{\vartheta_1}{\sqrt{\lambda_1 + 1}}, \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\lambda_2 + 1}}, ..., \frac{\vartheta_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}},..., \tag{22}$$

жүйе $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған болады.

Дәл осылай, (20) теңдеуден (16) формула ($(1),(3)$ есебі үшін) бойынша $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде скаляр көбейтіндіні қолданып аламыз

$$\{\vartheta_k, \vartheta_k\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\tilde{A}\vartheta_k, \vartheta_k\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)(\vartheta_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1). \tag{23}$$

$(23) \Rightarrow$

$$\frac{\vartheta_1}{\sqrt{\lambda_1 + 1}}, \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\lambda_2 + 1}}, ..., \frac{\vartheta_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}},..., \tag{24}$$

(3) есеп үшін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған болады.

Функционалдық талдау курсынан Гильберт-Шмидт теореамасы белгілі:

Теорема 4 H гильберт кеңістігінде кез-келген сызықты, компакт, өзіне-өзі түйіндес A операторының (яғни $A:\mathrm{H} \to \mathrm{H}$) $\{e_k\}$ меншікті элементтерінің және сәйкес $\{\lambda_k\}$ меншікті мәндердің ортонормаланған жүйесі бар болады, яғни $\varphi \in \mathrm{H}$ айнымалы элемент тек қана

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k + \varphi'$$

түрінде жіктеледі, мұндағы φ' $A\varphi' = 0$ шартын қанағаттандырады (яғни $\varphi' \in KerA$), $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k$ Фурье қатары Н кеңістігінде жинақталады, әрі қарай $A\varphi'$ $\{e_k\}$ жүйесі бойынша келесі түрдегі Фурье қатарына жіктеледі

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k e_k \ .$$

Гильберт-Шмидт теореамасы маңызды салдарға ие:

Салдар: Айталық сызықты, компакт, өзіне-өзі түйіндес $A: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ операторының өзегі тривиал болсын, онда $\{e_k\}$ жүйесі Н кеңістігінде ортонормаланған базис болады.

Ескерте кететін жағдай, ортонормаланған $\{e_k\}$ жүйесі толық немесе Н кеңістігінің ортонормаланған базисі деп аталады, егер кез келген $\varphi \in \mathrm{H}$ элементі Н кеңістігінде жинақталатын осы жүйе бойынша $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k$ Фурье қатарына жіктелсе. Гильберт-Шмидт теореамасының салдарын пайдалансақ, алынған (22) ((24)) жүйесі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ ($\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) кеңістігінде ортонормаланған базис болады. Ал $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ ($\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) кеңістігі шексіз өлшемді, онда (22) ((24)) жиыны да шектеусіз. Сондықтан $k \to \infty, \lambda_k \to \infty$. (18) жүйесінің $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған екенін көрсетейік. Шынымен де, егер ϑ_k үшін (19) операторлық теңдеуін $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ϑ_j скаляр көбейтіп, $k \neq j$ және сәйкес (20) теңдеуді $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ϑ_j скаляр көбейтсек, $k \neq j$, онда (11) және (15) пайдаланып, аламыз

$$0 = \{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{A\vartheta_k, \vartheta_j\}_{\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{2,\Omega}$$

$$0 = \{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\tilde{A}\vartheta_k, \vartheta_j\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{2,\Omega}.$$

Демек (18) жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған. Сонымен, (22) жүйесі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис (және сәйкес (24) $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде), онда осы жүйеге тартылған (натянутое) сызықтық көпбейнелік, яғни бұл (18) жүйесі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде барлық жерде тығыз (және сәйкес $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде). Бірақ $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі (және сәйкес $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігі) $L_2(\Omega)$ кеңістігінде барлық жерде тығыз, осыдан (18) жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис болады, яғни кез келген $\varphi \in L_2(\Omega)$ элементі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде жинақталатын Фурье қатарына жіктеледі

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \vartheta_k(x), \tag{25}$$

мұндағы $\varphi_k = (\varphi, \vartheta_k)_{2,\Omega}$ $\vartheta_k(x)$ жүйесі бойынша жіктелеген $\varphi(x)$ функциясының Фурье коэффициенті және бұл үшін Парсеваль теңдігі орынды

$$\|\varphi\|_{2,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \ . \tag{26}$$